Для цитирования: Бутаев М. М. Аналитическая модель преобразования неоднородности запоминающей среды круговой формы в изменение сигнала приемника при взаимодействии с гауссовым пучком // Вопросы радиоэлектроники. 2018. № 12. С. 102–105.
DOI 10.21778/2218-5453-2018-12-102-105
УДК 681.322

М. М. Бутаев[1]

[1] АО «Научно-производственное предприятие «Рубин»

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НЕОДНОРОДНОСТИ ЗАПОМИНАЮЩЕЙ СРЕДЫ КРУГОВОЙ ФОРМЫ В ИЗМЕНЕНИЕ СИГНАЛА ПРИЕМНИКА ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ГАУССОВЫМ ПУЧКОМ

Объектом исследования в статье являются методы расчета зависимости формы сигналов воспроизведения от неоднородностей среды круглой формы при взаимодействии с гауссовым пучком, предметом исследования – методы расчета значений функции свертки двухмерной гауссовой функции с обобщенной функцией круга. Цель – совершенствование методов расчета зависимости формы сигнала от неоднородности среды при взаимодействии с гауссовым пучком и аналогичных методов расчета вероятности. При выводе аналитической модели формы сигнала, возникающей при взаимодействии неоднородности среды круглой формы с гауссовым пучком, применены методы теории специальных функций и теории вероятности. Разработана аналитическая модель формы сигнала, возникающая при взаимодействии неоднородности среды круглой формы с гауссовым пучком, в которой учтены размеры пучка и радиус неоднородности, а также взаимоположение центров пучка и неоднородности. Получена аналитическая функция формы сигнала от неоднородности регистрирующей среды, имеющей форму круга, как двухмерное преобразование Вейерштрассе от обобщенной функции в виде ряда на базе модифицированных функций Бесселя. Приведены рекомендации по компьютерному вычислению функции. Построены графики сигнала воспроизведения накопителя информации на оптическом диске для некоторых значений переменных. Сформулировано предложение по использованию полученной аналитической функции в теории вероятности.

Ключевые слова: *сигнал оптического накопителя, вероятность события, преобразование Вейерштрассе*

Введение

Наиболее жесткие требования к параметрам канала воспроизведения в накопителях на оптических дисках и родственных устройствах, в которых для считывания информации используется лазерное излучение, обусловлены необходимостью минимизации размеров неоднородности регистрирующей среды, обычно имеющей форму круга. Для расчета требуемых характеристик узлов канала наиболее востребованы аналитические методы, так как они удобнее в вычислениях и точнее, что облегчает их использование в комплексных исследованиях. Для теоретических исследований накопителей на оптических дисках важна зависимость формы сигнала воспроизведения, генерируемого фотоприемником отраженного лазерного излучения, от неоднородностей коэффициента отражения запоминающей среды. Функции формы сигнала используются для вычисления разнообразных характеристик канала воспроизведения.

Аналитическая модель формы сигнала

Гауссов пучок имеет в поперечном сечении осесимметричное распределение мощности, описываемое двухмерной функцией Гаусса в декартовой системе координат. Обычно расчет такого сигнала сводится к численному вычислению однократного или двухкратного интеграла, что существенно ограничивает возможности его применения.

Зависимость формы сигнала приемника от неоднородности среды произвольной формы при воздействии гауссова пучка определяется функцией [1]

$$I(t,v,q,\sigma)=\frac{\alpha P_w}{\pi\sigma^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x-vt)^2+(y-q)^2}{\sigma^2}\right]\Gamma(x,y)\,dxdy,$$

где α – коэффициент чувствительности фотоприемника; P_w – мощность гауссова пучка, который преобразуется в приемнике с линейной характеристикой чувствительности; σ – характеристический радиус гауссова пучка; $\Gamma(x, y)$ – функция, описывающая форму неоднородности; v – скорость перемещения неоднородности относительно гауссова пучка; q – смещение оси гауссова пучка относительно продольной оси перемещения неоднородности.

Можно предположить и другие физические явления, описываемые сверткой двухмерной функции Гаусса и обобщенной функцией, которая также называется преобразованием Вейерштрассе [1]. Важным частным случаем является функция, описывающая сигнал от неоднородности в форме круга [2, 3]. Если $\Gamma(x,y)=\operatorname{circ}\left(\frac{x}{R},\frac{y}{R}\right)$, то получим следующее выражение:

$$I(t,v,q,\sigma,R)=$$
$$=\frac{\alpha P_w}{\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int\exp\left[-\frac{(x-vt)^2+(y-q)^2}{\sigma^2}\right]\operatorname{circ}\left(\frac{x}{R},\frac{y}{R}\right)dxdy.$$

На рис. 1 приведены введенные переменные.

При переходе к полярной системе координат [4] получается однократный интеграл:

$$I(t,v,q,\sigma,R)=\alpha P_w 2\frac{R^2}{\sigma^2}\exp\left[-\frac{(vt)^2+q^2}{\sigma^2}\right]\times$$
$$\times\int_0^1\rho I_0\left[\rho\frac{2R\sqrt{(vt)^2+q^2}}{\sigma^2}\right]\exp\left[-\left(\frac{R}{\sigma}\right)^2\rho^2\right]d\rho, \qquad (1)$$

где $I_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка [5].

Формула (1) может быть выражена через функции Ломмеля, которые, в свою очередь, представимы рядами по модифицированным функциям Бесселя. Для сокращения записей введены обозначения:

$$Q(v',u')=\int_0^1 rI_0(rv')\exp\left[-\frac{u'}{2}r^2\right]dr;$$
$$v'=\frac{2R\sqrt{(vt)^2+q^2}}{\sigma^2};\; u'=2\left(\frac{R}{\sigma}\right)^2.$$

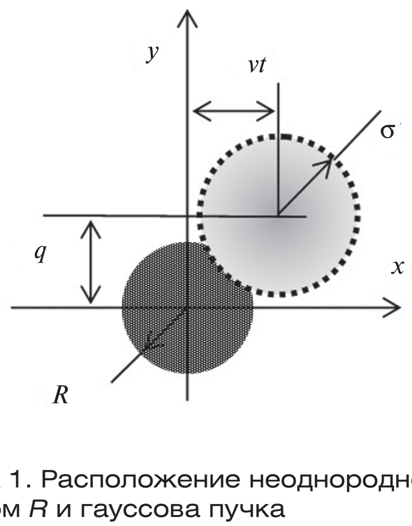

Рисунок 1. Расположение неоднородности радиусом R и гауссова пучка с характеристическим радиусом σ

Заменив переменные, получаем:

$$Q(v,u)=\int_0^1 rI_0\left[ri(-iv')\right]\exp\left[-i\frac{(-iu')}{2}r^2\right]dr=$$
$$=\int_0^1 rJ_0[rv]\exp\left(-i\frac{u}{2}r^2\right)dr;\; v=-iv';\; u=-iu'.$$

Указанный интеграл определен функциями Ломмеля [4] и, следовательно, рядами по модифицированным функциям Бесселя:

$$Q(u',v')=\frac{2}{-iu'}\exp\left(-i\frac{-iu'}{2}\right)\left[\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{-iu'}{-iv'}\right)^{2s+1}J_{2s+1}(-iv')+\right.$$
$$\left.+i\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{-iu'}{-iv'}\right)^{2s+2}J_{2s+2}(-iv')\right]=$$
$$=\frac{2i}{u'}\exp\left(-\frac{u'}{2}\right)\left[\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{u'}{v'}\right)^{2s+1}(i)^{2s+1}I_{2s+1}(-v')+\right.$$
$$\left.+i\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{u'}{v'}\right)^{2s+2}(i)^{2s+2}I_{2s+2}(-v')\right]=$$
$$=\frac{2i}{u'}\exp\left(-\frac{u'}{2}\right)\left[-i\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{u'}{v'}\right)^{2s+1}I_{2s+1}(v')-i\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{u'}{v'}\right)^{2s+2}I_{2s+2}(v')\right]=$$
$$=\frac{2}{u'}\exp\left(-\frac{u'}{2}\right)\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{u'}{v'}\right)^{s}I_s(v')\text{ при }u'\le v';$$

$$Q(u',v')=\frac{-i2}{-iu'}\exp\left(i\frac{(-iv')^2}{2(-iu')}\right)+\frac{2}{-iu'}\exp\left(-i\frac{-iu'}{2}\right)\times$$
$$\times\left[i\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{-iv'}{-iu'}\right)^{2s}J_{2s}(-iv')-\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{-iv'}{-iu'}\right)^{2s+1}J_{2s+1}(-iv')\right]=$$
$$=\frac{2}{u'}\exp\left(\frac{v'^2}{2u'}\right)+\frac{2i}{u'}\exp\left(-\frac{u'}{2}\right)\times$$
$$\times\left[i\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{v'}{u'}\right)^{2s}(-i)^{2s}I_{2s}(v')-\right.$$
$$\left.-\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{v'}{u'}\right)^{2s+1}(-i)^{2s+1}I_{2s+1}(v')\right]=$$
$$=\frac{2}{u'}\exp\left(\frac{v'^2}{2u'}\right)-\frac{2}{u'}\exp\left(-\frac{u'}{2}\right)\times$$
$$\times\left[\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{v'}{u'}\right)^{2s}I_{2s}(v')+\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{v'}{u'}\right)^{2s+1}I_{2s+1}(v')\right]=$$
$$=\frac{2}{u'}\exp\left(\frac{v'^2}{2u'}\right)-\frac{2}{u'}\exp\left(-\frac{u'}{2}\right)\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{v'}{u'}\right)^{s}I_s(v')\text{ при }u'>v'.$$

В преобразованиях использовано свойство функций Бесселя: $I_n(z)=(i)^{-n}J_n(iz)$.

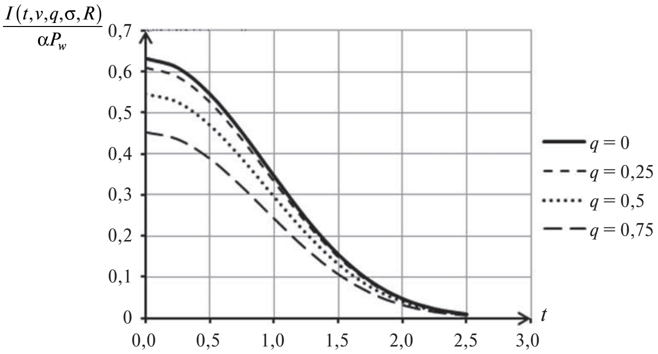

Рисунок 2. Графики функции $\dfrac{I(t,v,q,\sigma,R)}{\alpha P_w}$ при $R = \sigma = v = 1$, $q = [0,\ 0{,}25,\ 0{,}5,\ 0{,}75]$

При $u' = v'$ можно использовать любую из приведенных формул либо более простую

$$Q\left(u',u'\right)=\frac{2}{u'}\exp\left(-\frac{u'}{2}\right)\sum_{s=1}^{\infty}I_s\left(u'\right)=\frac{1}{u'}\exp\left(-\frac{u'}{2}\right)\left[e^{u'}-I_0(u')\right].$$

Ускорение вычисления функции $Q(u, v)$ на компьютере достигается при определении значений модифицированных функций Бесселя $I_n(z)$, $n = 2, 3$ ... по рекуррентной формуле $I_{n+1}(z)= I_{n-1}(z)-\dfrac{2n}{z}I_n(z)$.

Используя полученные формулы, форму сигнала от неоднородности круглой формы (1) можно вычислить с помощью следующей аналитической формулы:

$$I(t,v,q,\sigma,R)=\alpha P_w\frac{R}{\sqrt{(vt)^2+q^2}}\exp\left[-\frac{(vt)^2+q^2+R^2}{\sigma^2}\right]\times$$
$$\times\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{R}{\sqrt{(vt)^2+q^2}}\right)^s I_s\left(\frac{2R\sqrt{(vt)^2+q^2}}{\sigma^2}\right) \qquad (2)$$
$$\text{при } R\le\sqrt{(vt)^2+q^2};$$
$$I(t,v,q,\sigma,R)=$$
$$=\alpha P_w\left\{\exp\left[\frac{(vt)^2+q^2}{\sigma^2}\right]-\exp\left[-\frac{(vt)^2+q^2+R^2}{\sigma^2}\right]\times\right.$$
$$\left.\times\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{(vt)^2+q^2}}{R}\right)^s I_s\left(\frac{2R\sqrt{(vt)^2+q^2}}{\sigma^2}\right)\right\},$$
$$\text{при } R>\sqrt{(vt)^2+q^2}.$$

Сигнал имеет наибольшую амплитуду при $vt = q = 0$, которая равна

$$I(0,v,0,\sigma,R)=\alpha P_w\left\{1-\exp\left[-\left(\frac{R}{\sigma}\right)^2\right]\right\}.$$

Графики функции $\dfrac{I(t,v,q,\sigma,R)}{\alpha P_w}$ при $\sigma = v = 1$ и нескольких значениях R и q приведены на рис. 2. Переменная v является масштабирующим множителем t.

Амплитуда сигнала изменяется более заметно при изменениях отношения R/σ в области ее малых значений, чем в области больших значений. Увеличение мощности воспроизводимого сигнала при увеличении радиуса неоднородности происходит вследствие расширения сигнала, в то время как амплитуда сигнала не превышает величины αP_w. Ряды в (2) сходятся быстро, и для вычисления с абсолютной погрешностью не менее 10^{-6} требуется одно или два слагаемых ряда.

Формулу (2) можно использовать для расчета вероятности попадания нормально распределенной случайной величины в круг. Если случайная величина имеет математическое ожидание с координатами α, β и среднее квадратическое отклонение σ, то вероятность попадания в круг радиусом R рассчитывается с помощью функции свертки:

$$P(\beta,\gamma,\sigma,R)=$$
$$=\frac{1}{\pi\sigma^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x-\beta)^2+(y-\gamma)^2}{\sigma^2}\right]\mathrm{circ}\left(\frac{x}{R},\frac{y}{R}\right)dxdy.$$

На основании проделанных выкладок несложно получить решение для функции вероятности:

$$P(\beta,\gamma,\sigma,R)=\frac{R}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}\exp\left(-\frac{\beta^2+\gamma^2+R^2}{\sigma^2}\right)\times$$
$$\times\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{R}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}\right)^s I_s\left(\frac{2R\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}{\sigma^2}\right),\ \text{при } R\le\sqrt{\beta^2+\gamma^2}.$$

$$P(\beta,\gamma,\sigma,R)=\exp\left(\frac{\beta^2+\gamma^2}{\sigma^2}\right)-\exp\left(-\frac{\beta^2+\gamma^2+R^2}{\sigma^2}\right)\times$$
$$\times\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}{R}\right)^s I_s\left(\frac{2R\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}{\sigma^2}\right),\ \text{при } R>\sqrt{\beta^2+\gamma^2}.$$

Например, при стрельбе по круглой мишени радиусом R = 5 см из оружия, имеющего несмещенное гауссово распределение со среднеквадратическим отклонением σ = 5 см, вероятность попадания одним выстрелом равна $P(0,\ 0,\ 5,\ 5) = 0{,}632$. При тех же значениях R и σ, но со смещенным распределением, например, β = 2,5 см, γ = 1,25 см, вероятность попадания одним выстрелом равна $P(2{,}5,\ 1{,}25,\ 5,\ 5) = 0{,}526$.

Выводы

Аналитическая модель формы сигнала при преобразовании неоднородности среды в изменение сигнала приемника при взаимодействии с гауссовым пучком может быть достаточно просто реализована в виде компьютерной программы, обеспечивающей требуемую точность вычислений при небольших затратах процессорного времени. Полученная формула обеспечивает удобное аналитическое вычисление вероятности попадания нормально распределенной случайной величины в область в форме круга.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Диткин В. А., Брычков Ю. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.
2. Бутаев М. М., Коннов Н. Н., Краснов Г. И. Аналитические модели сигналов, воспроизводимых с диска оптического ЗУ // Вычислительная техника в автоматизированных системах контроля и управления: Межвуз. сб. науч. тр. Пенза: Пенз. политехн. ин-т, 1979. Вып. 9. С. 96–102.
3. Брычков Ю. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1978. 287 с.
4. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. 720 с.
5. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. М.: Наука, 1979. 832 с.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Бутаев Михаил Матвеевич, д.т.н., профессор, ученый секретарь, АО «Научно-производственное предприятие «Рубин», Российская Федерация, 440000, Пенза, ул. Байдукова, д. 2, тел.: 8 (8412) 20-48-91, e-mail: nts@npp-rubin.ru.

For citation: Butaev M. M. Analytical model of transformation of inhomogeneity of reminder medium of circular form in change of receiver signal while interacting with a Gaussian beam. Voprosy radioelektroniki, 2018, no. 12, pp. 102–105.

DOI 10.21778/2218-5453-2018-12-102-105

M. M. Butaev

ANALYTICAL MODEL OF TRANSFORMATION OF INHOMOGENEITY OF REMINDER MEDIUM OF CIRCULAR FORM IN CHANGE OF RECEIVER SIGNAL WHILE INTERACTING WITH A GAUSSIAN BEAM

The objects of the study are the methods for calculating the shape of the reproduction signals from the inhomogeneities of a round-shaped medium by a Gaussian beam; the subjects of the study are methods for calculating the values of the convolution function of a two-dimensional Gaussian function with a generalized circle function. The goal is to improve the methods for calculating the waveform from the inhomogeneity of the medium by a Gaussian beam and similar methods of calculating the probability. In the derivation of the analytical model of the waveform generated by the interaction of the inhomogeneity of a circular medium with a Gaussian beam, the methods of the theory of special functions and probability theory are applied. An analytical model of the waveform formed during the interaction of the inhomogeneity of a circular medium with a Gaussian beam is developed, which takes into account the beam dimensions and the inhomogeneity radius, as well as the interrelation of the beam centers and the inhomogeneity. An analytic function of the waveform form from the inhomogeneity of the recording medium, which has the form of a circle, is obtained as a two-dimensional Weierstrass transform from a generalized function in the form of a series on the basis of modified Bessel functions. Recommendations for calculating the function on a computer are given. The graphics of the playback signal of the information storage device on the optical disk for some values of the variables are constructed. A proposal is made to use the obtained analytic function in probability theory.

Keywords: optical storage signal, event probability, Weierstrass transformation

REFERENCES

1. Ditkin V. A., Brychkov Yu. A., Prudnikov A. P. *Integralnye preobrazovaniya i operacionnoe ischislenie* [Integral transformations and operational calculus]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961, 524 p. (In Russian).
2. Butaev M. M., Konnov N. N., Krasnov G. I. Analytical models of signals reproduced from the disk of optical memory device. *Vychislitelnaya tekhnika v avtomatizirovannyh sistemah kontrolya i upravleniya,* Penza, PPI Publ., 1979, iss. 9, pp. 96–102. (In Russian).
3. Brychkov Yu. A., Prudnikov A. P. *Integralnye preobrazovaniya obobshchyonnyh funkcij* [Integral transformations of generalized functions]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 287 p. (In Russian).
4. Born M., Wolf E. *Principles of optics.* 4th ed. Pergamon, 1970, 808 p.
5. Abramowitz M., Stegun I. A., editors. *Handbook of mathematical functions.* Dover, 1965, 1046 p.

AUTHOR

Butaev Mikhail, D. Sc., professor, JSC Research and Production Enterprise «Rubin», 2, Baydukova St, Penza, 440000, Russian Federation, tel.: +7 (8412) 20-48-91, e-mail: nts@npp-rubin.ru.